

Тема 2.1. Основы теории множеств

Определение. Множество – любая определенная совокупность объектов произвольной природы, объединенная общими характеристиками. Обозначают множества прописными латинскими буквами: A, B, C , а его элементы обозначаются строчными латинскими буквами: a, b .

Например:

$x \in A$ (x является элементом множества A (" x принадлежит A ")),

$x \notin A$ (x не является элементом множества A).

Определение. Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается оно символом: $\emptyset$.

Определение. U – универсальное множество (универсум) – множество, из которого берутся элементы в конкретном рассуждении. U – множество, рассматриваемое как наиболее общее в данной ситуации.

Множество элементов x , удовлетворяющих свойству $P(x)$ обозначается $\{x | P(x)\}$.

Примеры.

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$R = \{-\infty; +\infty\}$ – множество вещественных чисел.

$C = \{a + ib | a \in R, b \in R\}$ – множество комплексных чисел.

1.2. Сравнение множеств

Определение. $A \subseteq B$ (A содержится в B или B включает A), если $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. A называется подмножеством B . Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется строгим (собственным) подмножеством B . Обозначается это $A \subset B$.

Определение. $A = B$ если они являются подмножествами друг друга $A = B \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Определение. Мощность конечного множества $|A|$ – число его элементов.

1.3. Операции над множествами

Определение. Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них. $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } B \text{ одновременно}\}$

Определение. Пересечением множеств A и B ($A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и первому и второму одновременно. $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$

Определение. Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) называется множество, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B . $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Определение. Симметрической разностью множеств A и B ($A \Delta B$) называется множество, состоящее из элементов множества A , не являющихся элементами множества B и элементов множества B , не являющихся элементами множества A . $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}$

Определение. Дополнением множества A ($\bar{A}$) называется множество, состоящее из элементов множества U , не принадлежащих множеству A .

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Пример: $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$B = \{c, d, e, f\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A \cap B = \{c, d, e\}$$

$$A \setminus B = \{a, b\}$$

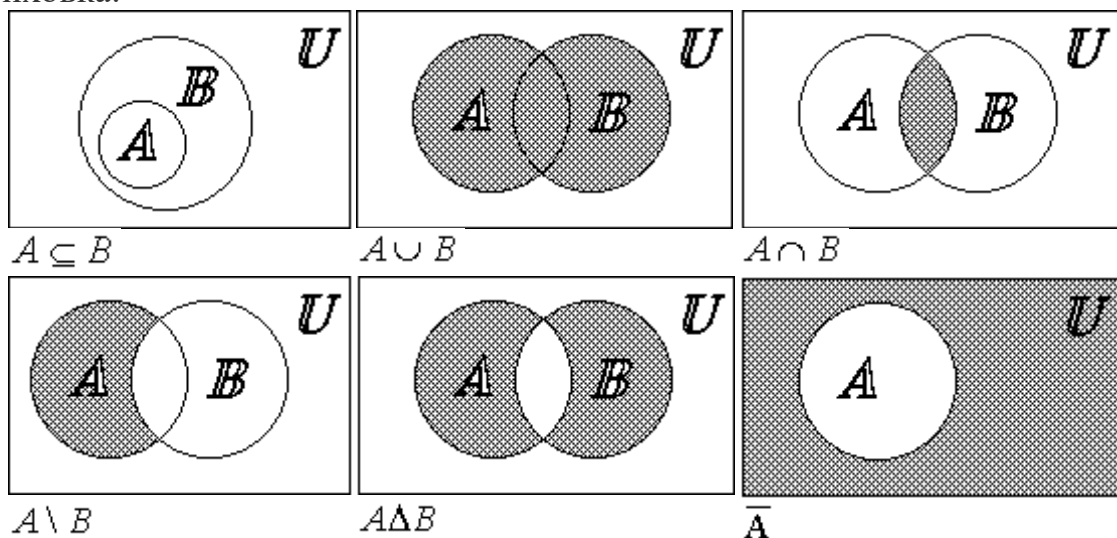
$$B \setminus A = \{f\}$$

$$A \Delta B = \{a, b, f\}$$

$\bar{A}$ зависит от того, какое U . Если $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, то $\bar{A} = \{f\}$, если $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, то $\bar{A} = \{f, g\}$.

1.4. Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна – это геометрическое представление множеств. Множество U изображается прямоугольником, рассматриваемые множества – фигурами (окружностями). Для выделения результата применяется штриховка.



1.5. Табличный способ задания множеств

Пусть задано множество U . Рассмотрим произвольное его подмножество $A \subseteq U$ и элемент $x \in U$.

Определение. Характеристической (индикаторной) функцией для множества A называется функция

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}.$$

Таким образом: $I_A : U \rightarrow \{0,1\}$.

Индикаторы удобно задавать с помощью таблиц:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \setminus B$	$x \in \bar{A}$	$x \in A \Delta B$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

1.6. Свойства операций над множествами

Объединение и пересечение:

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность
2. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – ассоциативность
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность
7. $A \cup A = A$ – идемпотентность
8. $A \cap A = A$ – идемпотентность
9. $A \cup \bar{A} = U$ – свойство дополнения
10. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ – свойство дополнения
11. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ – закон де Моргана
12. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ – закон де Моргана
13. $A \cup \emptyset = A$ – свойство нуля
14. $A \cap \emptyset = \emptyset$ – свойство нуля

Дополнение:

15. $\overline{\bar{A}} = A$ – инволютивность
16. $A \setminus B = A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$
17. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Разность, симметрическая разность:

18. $A \setminus \emptyset = A$
19. $A \setminus A = \emptyset$

20. $A \Delta B = B \Delta A$
21. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
22. $A \Delta \emptyset = A$
23. $A \Delta A = \emptyset$

1.7. Отношения

Определение. Пусть A и B произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству A , а второй – множеству B .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Пример. $R \times R = R^2$ – точки плоскости.

Свойства декартовых произведений

1. $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
2. $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$
3. $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$
4. $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$
5. $(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$
6. $A \times (B_1 \setminus B_2) = (A \times B_1) \setminus (A \times B_2)$

Понятие отношения.

Отношение это один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-либо признака R у элемента множества A . Например, "быть четным" на множестве натуральных чисел. Все элементы множества A , отличающиеся признаком R , образуют подмножество множества A , называемое отношением R .

Бинарные отношения

Бинарные (двуместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множеств A и B . Все пары (a, b) элементов множеств A и B , находящиеся в отношении R , образуют подмножество множества $A \times B$.

Определение. Бинарное отношение – это тройка множеств (R, A, B) , где $R \subseteq A \times B$ – график отношения. Пишут $(a, b) \in R$; или aRb .

Область определения: $\text{Dom } R = \delta_R = \{x \in A \mid \exists y \in B (x, y) \in R\}$;

Область значений: $\text{Im } R = \rho_R = \{y \in B \mid \exists x \in A (x, y) \in R\}$;

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}$;

Композиция отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$:

$$R \circ S = \{(x, y) \in A \times C \mid \exists z \in B (xRz \ \& \ zRy)\}.$$

Частичным порядком (пишут $x \leq y$), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

1.8. Специальные бинарные отношения

Бинарное отношение R на A называется

- Рефлексивным, если $\forall x \in A \quad (x, x) \in R$;
- Симметричным, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- Транзитивным, если $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;
- Антисимметричным, если $(x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y$;
- Отношением эквивалентности на A (пишут $x \sim y$), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

Определение. Бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ называется функцией из X в Y , если $\text{Dom} f = X$ и $(x, y) \in f, (x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

Функция $f: X \rightarrow Y$ называется

- сюръективной, если $\forall y \in Y \quad \exists x \in X (y = f(x))$;
- инъективной, если $\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$;
- биективной, если она сюръективна и инъективна.